Θεωρούμε τους παρακάτω ισχυρισμούς.(Εντός Σχολικού Βιβλίου)
α) Να χαρακτηρίσετε καθένα από αυτούς **αληθή ή ψευδή.**
β) Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας**.**

1) Κάθε γραμμή σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.

2)Αν δύο συναρτήσεις f, g έχουν πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα όπου Α≠Β, τότε δεν υπάρχει σύνολο Γ στο οποίο οι συναρτήσεις f, g θα είναι ίσες.

3) Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στα Α, Β αντίστοιχα, ισχύει ότι gof=fog.

4) Κάθε συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο ή ελάχιστο.

5) Κάθε συνάρτηση f που είναι 1-1 στο διάστημα Δ, τότε είναι πάντα και γνησίως μονότονη στο Δ.

6) Το όριο $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ εξαρτάται πάντα από τα άκρα α και β των διαστημάτων (α, x_o) και (x_o, β) στα οποία είναι ορισμένη η συνάρτηση f.

7)Αν P(x), Q(x) είναι πολυώνυμα, ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_o)}{Q(x_o)}$, για κάθε $x_o \in R$.

8)Έστω μια συνάρτηση $f: A\to\square$. Αν υπάρχει το όριο της f στο $x_o \in A$ τότε η f θα είναι υποχρεωτικά συνεχής στο σημείο x_o.

9)Αν μια συνάρτηση είναι ορισμένη στο [α,β] με f(α) ≠ f(β), τότε η συνάρτηση f παίρνει υποχρεωτικά όλες τις τιμές ανάμεσα στα f(α), f(β).

10)Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο x_o, είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

11)Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο $\Delta = (-\infty, x_o)\cup(x_o, +\infty)$ και ισχύει f′(x) = 0 για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι σταθερή στο Δ.

12)Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ τότε ισχύει $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

13)Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο R, αν για κάποιο $x_o \in R$ ισχύει $f'(x_o) = 0$, τότε το x_o είναι θέση ακροτάτου της f.

14)Κάθε συνάρτηση που παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, έχει και ολικό μέγιστο.

15)Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης δεν μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.

16)Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης f είναι πάντοτε μέγιστο της συνάρτησης f.
17) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη

ΜΠΑΓΑΝΗΣ

στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι κυρτή στο Δ, τότε f''(x) > 0 για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

18)Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, αν για κάποιο $x_o \in R$ ισχύει $f''(x_o) = 0$, τότε το x_o είναι θέση σημείου καμπής της f.

19)Αν f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και ισχύει για $\alpha,\beta,\gamma \in \Delta$
$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$ τότε κατ' ανάγκη είναι $\alpha < \gamma < \beta$.

ΔΙΑΤΥΠΩΣΕΙΣ - ΟΡΙΣΜΟΙ

1) Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Fermat και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

2) Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Bolzano και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

3) Τι ονομάζουμε **αρχική συνάρτηση ή παράγουσα** της f σε ένα διάστημα Δ στο οποίο η f είναι ορισμένη.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ (ΨΕΥΔΗΣ Ή ΑΛΗΘΗΣ με αιτιολόγηση)

1)Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,1], παραγωγίσιμη στο (0,1) και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.

2)Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha) < f(\beta)$, τότε υπάρχει $x_o \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_o) < 0$.

3)Αν f, g είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha) = g(\alpha)$ και $f(\beta) = g(\beta)$, τότε υπάρχει $x_o \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε στα σημεία $A(x_o, f(x_o))$ και $B(x_o, g(x_o))$ οι εφαπτόμενες να είναι παράλληλες.

4)Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

ΣΩΣΤΟ Ή ΛΑΘΟΣ (χωρίς αιτιολόγηση)

1) Η ακολουθία είναι πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού όλους τους πραγματικούς αριθμούς.

2) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο Δ=(α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι $f(\Delta) = (\lim_{x\to\beta^-} f(x), \lim_{x\to\alpha^+} f(x))$.

3) Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_o τότε ισχύει $f'(x_o) = (f(x_o))'$.

4) Έστω f αντιστρέψιμη, τότε ισχύει $f(f^{-1}(x)) = x$, $x \in f(A)$.

5) Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f « διαπερνά » την καμπύλη.

ΜΙΛΑΓΑΝΗΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

i) α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

β) Να μελετήσετε τη μονοτονία της f και να προσδιορίσετε τα ακρότατα της.

ii) α) Να βρείτε τις τιμές των α,β ώστε η συνάρτηση $\dfrac{\alpha \ln x + \beta}{x}$ να είναι αρχική της f.

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{\kappa \to +\infty} E(\kappa)$, όπου $E(\kappa)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τις ευθείες $x = 1$, $x = \kappa > 1$ και τον άξονα $x'x$.

2) i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in R$ ισχύει $e^x \geq x+1$.

ii) Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει $\alpha^x \geq x+1$, $\alpha > 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

iii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x \cdot (x^2 + 2)$, $g(x) = x^3 + x^2 + 2x + 2$, την ευθεία $x = 1$ και τον άξονα $y'y$.

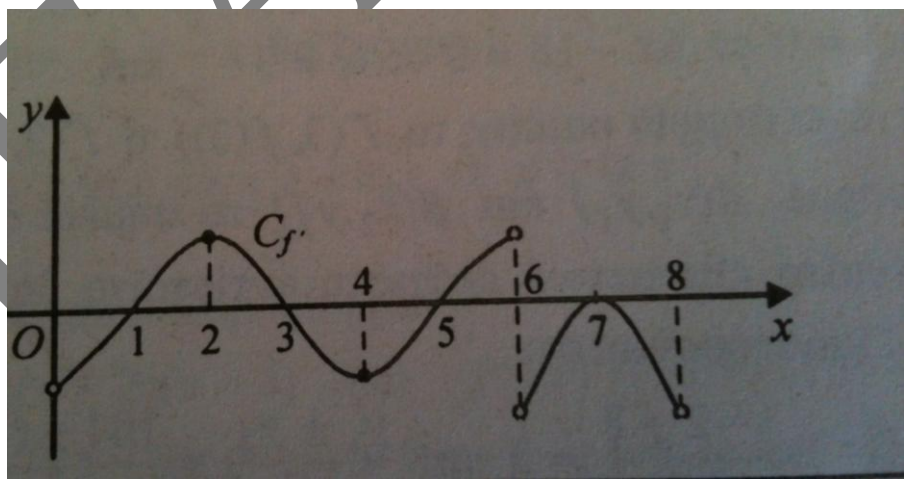
3) i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\ln x \leq x - 1$.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \ln x$ στο σημείο $(\alpha, f(\alpha))$ με $\alpha > 1$.

iii) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f τον άξονα $x'x$ και την εφαπτομένη (ε).

iv) Αν το σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$, $\alpha > 1$ απομακρύνεται από τον άξονα $y'y$ με ταχύτητα 2 cm/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του χωρίου Ω κατά τη χρονική στιγμή που η εφαπτομένη (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

4) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου κάποιας συνεχούς συνάρτησης στο διάστημα [0,8].



α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα, καθώς και τις θέσεις των τοπικών ακρότατων.(Με αιτιολόγηση)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη καθώς και τις θέσεις σημείων καμπής. (Με αιτιολόγηση)

ΜΕΓΑΝΗΣ